Нам предстоит разобрать следующие вопросы:

1.3. Трансформационные свойства коэффициентов разложения в линеаризованных материальных уравнениях при преобразованиях точечной кристаллографической группы

При ответе на вопрос билета требуется получить закон преобразования коэффициентов разложения линеаризованных материальных уравнений при преобразованиях, поворота, инверсии, зеркального отражения. Сформулировать принцип Неймана и получить выражения для тензора диэлектрической проницаемости кристалла с тетрагональной кристаллической решеткой. Привести выражения для компонент тензора диэлектрической проницаемости для кристаллических сингоний: триклинной, моноклинной, ромбической, тетрагональной, гексогональной, кубической.

Мы начнём с середины – принципа Неймана. Он гласит:

Группа симметрии любого физического свойства кристалла должна включать элементы симметрии точечной группы кристалла

$$G_к \subseteq G_{св}$$

где $G_к$ — группа симметрии кристалла, $G_{св}$ — группа симметрии свойства

Даже если вы подзабыли, что такое группа, смысл принципа Неймана понятен: физические свойства должны быть или такие же «симметрические», как кристалл, или ещё более «симметрические».

Примеры будут чуть позже! Перейдём к табличке:

Оптическая классификация	*Сингония*	*Характеризующая симметрия*	*Вид характеристической поверхности и ее ориентация*	*Тензор, приведенный к осям принятой ориентации*	*Число независимых компонент*	*Способ приведения к главным осям*
Двуосные кристаллы	Триклинная	Центр симметрии или отсутствие симметрии	Произвольная поверхность 2-го порядка. Положение относительно кристаллографических осей не фиксировано	$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$	6	С помощью векового уравнения
	Моноклинная	Одна ось 2-го порядка	Произвольная поверхность 2-го порядка с одной осью X_2 (или X_3), параллельной оси симметрии 2-го порядка	Ось 2 $(\bar{2}) \parallel X_2$ $\begin{bmatrix} S_{11} & 0 & S_{13} \\ 0 & S_2 & 0 \\ S_{31} & 0 & S_{33} \end{bmatrix}$ Ось 2 $(\bar{2}) \parallel X_3$ $\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix}$	4	С помощью окружности Мора
	Ромбическая	Три взаимно перпендикулярные оси 2-го порядка	Произвольная поверхность 2-го порядка с осями X_1, X_2, X_3, параллельными осям симметрии 2-го порядка	$\begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix}$	3	Не требуется
Одноосные кристаллы	Тетрагональная Гексагональная Тригональная	Одна ось 3-го, 4-го или 6-го порядка	Поверхность вращения вокруг главной оси симметрии, параллельной X_3	$\begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & S_2 \end{bmatrix}$	2	Не требуется
Изотропная среда	Кубическая	Четыре оси 3-го порядка	Сфера	$\begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix}$	1	Не требуется

Не пугайтесь – нам потребуются не все столбцы. Давайте идти снизу вверх.

Изотропная среда – понятно, что это: «желе» без выделенного направления.

Для нас основными в таблице являются столбцы «число независимых» конпонент и вид тензора.
Когда среда изотропна, то «всё одинаково» и среда описывается всего одной компонентой. Её мы видим в тензоре:

$$\begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix}$$

И такой вид имеют все возможные двензоры – и двензор диэлектрической проницаемости:

$$\begin{array}{ccccc} \varepsilon & 0 & 0 & E_1 & D_1 \\ 0 & \varepsilon & 0 * & E_2 = & D_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon & E_3 & D_3 \end{array}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

и двензор упругости

$$\begin{array}{ccccc} k & 0 & 0 & x_1 & F_1 \\ 0 & k & 0 * & x_2 = & F_2 \\ 0 & 0 & k & x_3 & F_3 \end{array}$$

$$\vec{F} = k\vec{x}$$

везде одна независимая компонента!

Теперь переходим к кристаллам, где есть одна выделенная ось. Пример такого «кристалла» - губки, для мытья посуды.


,


У нас уже будут две независимые компоненты: она – вдоль оси z,

$$\begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & S_2 \end{bmatrix}$$

другая в плоскости, перпендикулярной ей:

$$\begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & S_2 \end{bmatrix}$$

Теперь у нас могут быть два коэффициента жёсткости,

Наконец, совсем нечто несимметричное – уже три независимых компоненты:

$$\begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix}$$

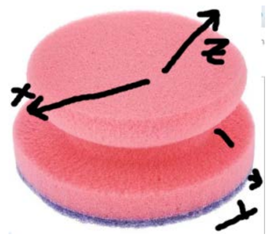
А как может получиться

Тензор, приведенный к осям принятой ориентации	*Число независимых компонент*
$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$	6
Ось 2 $(\bar{2}) \parallel X_2$ $\begin{bmatrix} S_{11} & 0 & S_{13} \\ 0 & S_2 & 0 \\ S_{31} & 0 & S_{33} \end{bmatrix}$ Ось 2 $(\bar{2}) \parallel X_3$ $\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix}$	4

то, что сверху?

Если взять «плохие» оси. Помните механику 1-го семестра, главные оси? Если оси взять плохие, то и результат будет хуже.

Например, если для губки взять не такие оси 

, а 

такие, то вместо 2 компонент станет 4:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix}$$

Ну а если изначально не было вообще никакой симметрии (три независимых компонент), то «плохой» выбор осей приведёт к 6 независимым компонентам:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$$

В столбце ***Способ приведения к главным осям*** указано всякое: С помощью векового уравнения; С помощью окружности Мора; Не требуется; Не требуется; Не требуется. Тут вот это «вековое уравнение» и «окружность Мора» Соколов не спрашивает; важно помнить лишь, что главные оси – это оси, когда матрица диагональна (например, это двензора инерции это условие прохождения через центр масс), и 1-2-3 независимые компоненты УЖЕ соответствуют главным осям, а 4 и 6 нет.

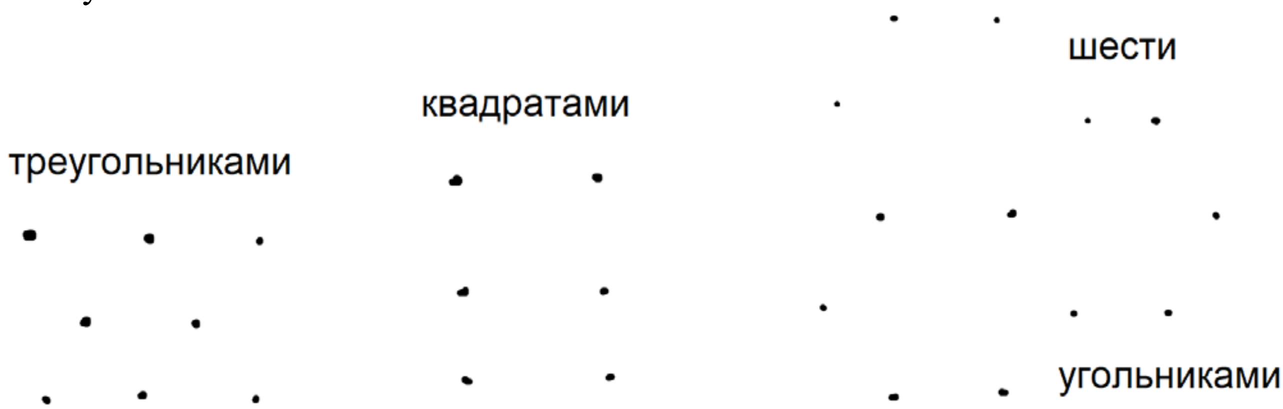
Давайте сингонию посмотрим, потому что это говно требуется:

1.3. Трансформационные свойства коэффициентов разложения в линеаризованных материальных уравнениях при преобразованиях точечной кристаллографической группы

При ответе на вопрос билета требуется получить закон преобразования коэффициентов разложения линеаризованных материальных уравнений при преобразованиях, поворота, инверсии, зеркального отражения. Сформулировать принцип Неймана и получить выражения для тензора диэлектрической проницаемости кристалла с тетрагональной кристаллической решеткой. Привести выражения для компонент тензора диэлектрической проницаемости для кристаллических сингоний: триклинной, моноклинной, ромбической, тетрагональной, гексогональной, кубической.

Оптическая классификация	*Сингония*	*Характеризующая симметрия*	*Вид характеристической поверхности и ее ориентация*	*Тензор, приведенный к осям принятой ориентации*	*Число независимых компонент*	*Способ приведения к главным осям*
Двуосные кристаллы	Триклинная	Центр симметрии или отсутствие симметрии	Произвольная поверхность 2-го порядка. Положение относительно кристаллографических осей не фиксировано	$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$	6	С помощью векового уравнения
	Моноклинная	Одна ось 2-го порядка	Произвольная поверхность 2-го порядка с одной осью X_2 (или X_3), параллельной оси симметрии 2-го порядка	Ось 2 $(\bar{2}) \parallel X_2$ $\begin{bmatrix} S_{11} & 0 & S_{13} \\ 0 & S_2 & 0 \\ S_{31} & 0 & S_{33} \end{bmatrix}$ Ось 2 $(\bar{2}) \parallel X_3$ $\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix}$	4	С помощью окружности Мора
	Ромбическая	Три взаимно перпендикулярные оси 2-го порядка	Произвольная поверхность 2-го порядка с осями X_1, X_2, X_3, параллельными осям симметрии 2-го порядка	$\begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix}$	3	Не требуется
Одноосные кристаллы	Тетрагональная Гексагональная Тригональная	Одна ось 3-го, 4-го или 6-го порядка	Поверхность вращения вокруг главной оси симметрии, параллельной X_3	$\begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & S_2 \end{bmatrix}$	2	Не требуется
Изотропная среда	Кубическая	Четыре оси 3-го порядка	Сфера	$\begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix}$	1	Не требуется

Сингония – это кристаллическая решётка, характеризующая данную симметрию. Кубичекая – понятно, самая симметричная. Что касается тетрагональной-гексагональной-тригональной, то тетра – 4, гекса – 6, триго – 3. Откуда эти числа? А это из задачи «как можно замостить плоскость правильными многоугольниками:



И т.к. это случай «губки» с выделенной осью z, все они наслаиваются друг на друга:

- два шестиугольника на двух «этажах» в параллельных плоскостях, нормальных оси z.

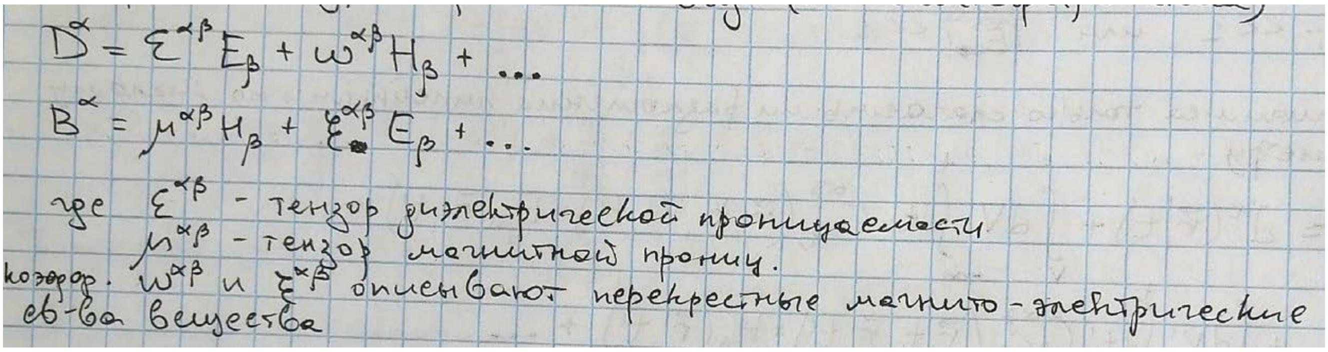
Вернёмся к началу вопроса:

1.3. Трансформационные свойства коэффициентов разложения в линеаризованных материальных уравнениях при преобразованиях точечной кристаллографической группы

При ответе на вопрос билета требуется получить закон преобразования коэффициентов разложения линеаризованных материальных уравнений при преобразованиях, поворота, инверсии, зеркального отражения.

Тут, хоть убей, без формул не обойтись – и Соколов их хочет.

Тут надо вспомнить



$$D^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} E_\beta + \omega^{\alpha\beta} H_\beta + \dots$$

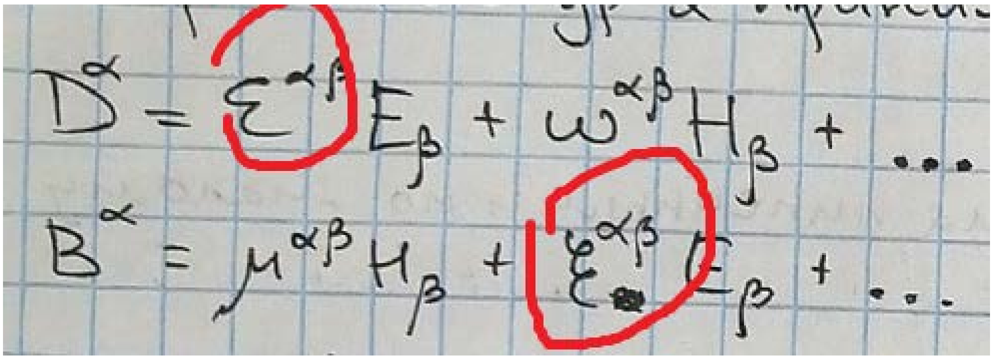
$$B^\alpha = \mu^{\alpha\beta} H_\beta + \xi^{\alpha\beta} E_\beta + \dots$$

где $\varepsilon^{\alpha\beta}$ - тензор диэлектрической проницаемости
$\mu^{\alpha\beta}$ - тензор магнитной прониц.
коэфф. $\omega^{\alpha\beta}$ и $\xi^{\alpha\beta}$ описывают перекрестные магнито-электрические св-ва вещества

Напомним, что в общем случае D может зависеть от E нелинейно (и B от H), но мы рассматриваем (как от нас и требуют) линейную часть, а нелинейную – в многоточии – не учитываем.

Важно: заметьте, что D зависит не только E, а ещё и от H. B зависит не только от H, но и от E.

Ну и обратите внимание на то, что есть эпсилон, а есть кси. Перепутать их проще простого:



$$D^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} E_\beta + \omega^{\alpha\beta} H_\beta + \dots$$

$$B^\alpha = \mu^{\alpha\beta} H_\beta + \xi^{\alpha\beta} E_\beta + \dots$$

~~Вот что не так с людьми, пишущими кси? Зачем они это делают? Из вредности?~~

Написали мы уравнения и тут…

Соколова заинтересовало, а что произойдёт при поворотах-отражениях.

(Спойлер: ничего красивого, будут некрасивые выкладки, которые от вас и ждут).

Вспомним линал: там были матрицы поворота и матрицы отражения. Обозначим эти матрицы как П. (Соколов ещё ставит крышечку: $\widehat{\Pi}$, подчёркивая, что это оператор).

Было так:

$$D^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta} E_{\beta} + \omega^{\alpha\beta} H_{\beta} + \ldots$$

Домножаем слева на $\hat{\Pi}_{\nu\alpha}$ и получаем:

$$\underbrace{\Pi_{\nu\alpha} D^{\alpha}}_{\tilde{D}_{\nu}} = \Pi_{\nu\alpha}\varepsilon^{\alpha\beta}\underbrace{E_{\beta}}_{\hat{\Pi}^{-1}_{\beta\gamma}\tilde{\tilde{E}}^{\gamma}} + \hat{\Pi}_{\nu\alpha}\omega^{\alpha\beta}\underbrace{H_{\beta}}_{\det\hat{\Pi}\cdot\hat{\Pi}^{-1}_{\beta\gamma}\tilde{H}^{\gamma}} + \ldots$$

далее следуют убойные выкладки:

$$\underbrace{\det\hat{\Pi}\cdot\hat{\Pi}_{\nu\alpha}B^{\alpha}}_{\tilde{B}_{\nu}} = \det\hat{\Pi}\cdot\hat{\Pi}_{\nu\alpha}\mu^{\alpha\beta}\underbrace{H_{\beta}}_{\det\hat{\Pi}\cdot\hat{\Pi}^{-1}_{\beta\gamma}\tilde{H}^{\gamma}} + \det\hat{\Pi}\cdot\hat{\Pi}_{\nu\alpha}\xi^{\alpha\beta}\underbrace{E_{\beta}}_{\hat{\Pi}^{-1}_{\beta\gamma}\tilde{E}^{\gamma}} + \ldots$$

Перепишем материальные ур-е:

$$\tilde{D}_{\nu} = \underbrace{\Pi_{\nu\alpha}\varepsilon^{\alpha\beta}\hat{\Pi}^{-1}_{\beta\gamma}}_{\tilde{\varepsilon}_{\nu\gamma}}\tilde{E}^{\gamma} + \underbrace{\det\hat{\Pi}\cdot\hat{\Pi}_{\nu\alpha}\omega^{\alpha\beta}\cdot\hat{\Pi}^{-1}_{\beta\gamma}}_{\tilde{\omega}_{\nu\gamma}}\cdot\tilde{H}^{\gamma} + \ldots$$

$$\tilde{B}_{\nu} = \underbrace{(\det\hat{\Pi})^2}_{1}\underbrace{\hat{\Pi}_{\nu\alpha}\mu^{\alpha\beta}\hat{\Pi}^{-1}_{\beta\gamma}}_{\tilde{\mu}_{\nu\gamma}}\tilde{H}^{\gamma} + \underbrace{\det\hat{\Pi}\cdot\hat{\Pi}_{\nu\alpha}\xi^{\alpha\beta}\hat{\Pi}^{-1}_{\beta\gamma}}_{\tilde{\xi}_{\nu\gamma}}\tilde{E}^{\gamma} + \ldots$$

Материальные ур-я после преобразования примут вид:

$$\tilde{D}_{\nu} = \tilde{\varepsilon}_{\nu\gamma}\tilde{E}^{\gamma} + \tilde{\omega}_{\nu\gamma}\tilde{H}^{\gamma} + \ldots, \quad \tilde{B}_{\nu} = \tilde{\mu}_{\nu\gamma}\tilde{H}^{\gamma} + \tilde{\xi}_{\nu\gamma}\tilde{E}^{\gamma} + \ldots$$

где $\tilde{\varepsilon}_{\nu\gamma} = \hat{\Pi}_{\nu\alpha}\varepsilon^{\alpha\beta}\hat{\Pi}^{-1}_{\beta\gamma}$, $\tilde{\mu}_{\nu\gamma} = \hat{\Pi}_{\nu\alpha}\mu^{\alpha\beta}\hat{\Pi}^{-1}_{\beta\gamma}$ – обыкнов. (полярные) тензоры

$\tilde{\omega}_{\nu\gamma} = \det\hat{\Pi}\cdot\hat{\Pi}_{\nu\alpha}\omega^{\alpha\beta}\hat{\Pi}^{-1}_{\beta\gamma}$, $\tilde{\xi}_{\nu\gamma} = \det\hat{\Pi}\cdot\hat{\Pi}_{\nu\alpha}\xi^{\alpha\beta}\hat{\Pi}^{-1}_{\beta\gamma}$ – аксиальные тензоры

Разобраться в этих тензорных выкладках с кучей индексов без пол-литра, казалось бы, невозможно. Но алкоголь необязателен, если мы поймём, что всё это было на

линале. А именно, мы сейчас проходим формулу преобразования матрицы при повороте.
Помните на линале: если есть матрица А и матрица поворота U, то
$A_{\text{в новой системе координат}}$
$= UAU^{-1}$ или UAU^{-1}, в зависимости от того, как мы матрицу поворота определяем
Сравните:

$\tilde{\varepsilon}_{\nu\gamma} = \hat{\Pi}_{\nu\alpha}\varepsilon^{\alpha\beta}\hat{\Pi}^{-1}_{\beta\gamma}$, $\tilde{\mu}_{\nu\gamma} = \hat{\Pi}_{\nu\alpha}\mu^{\alpha\beta}\hat{\Pi}^{-1}_{\beta\gamma}$ – обыкнов. (полярные) тензоры

сходство очевидно. Т.е. Соколов повторил вывод из линала для матриц диэлектрической и магнитной проницаемости.

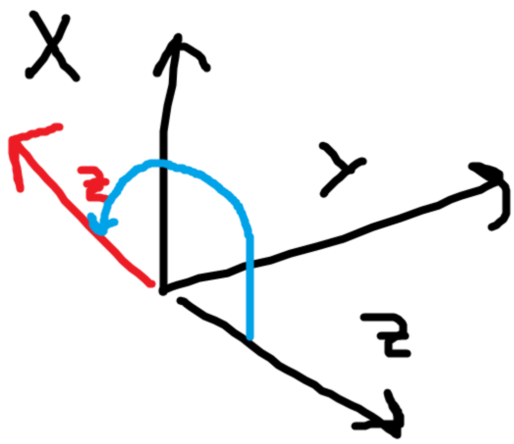
Но ниже у Соколова есть ещё одна строчка:

$\tilde{\omega}_{\nu\gamma} = \det\hat{\Pi}\cdot\hat{\Pi}_{\nu\alpha}\omega^{\alpha\beta}\hat{\Pi}^{-1}_{\beta\gamma}$, $\tilde{\xi}_{\nu\gamma} = \det\hat{\Pi}\cdot\hat{\Pi}_{\nu\alpha}\xi^{\alpha\beta}\hat{\Pi}^{-1}_{\beta\gamma}$ – аксиальные тензоры

А это откуда? Тут надо напомнить читателю, что такое аксиальные тензоры (возможно, рассказывали, возможно, нет).

Как вы знаете, есть всякие правила левых, правых рук, правило векторного произведения, где указано «против часовой стрелки».
Все физ.величины, знак которых не изменится от смены этой договорённости – полярные.
Все физ.величины, знак которых поменяется – аксиальные. Т.е. их знак – не абсолют, а лишь результат договорённости людей «хотим против часовой стрелки, а не по».

Отражение равносильно как смене «договорённости». Если мы поменяем направление одной из осей, оставив две другие на месте:



то это будет равносильно смене правой тройки на левую (или наоборот), т.е. смене «договорённости». В общем, эти танцы с чётностью и дадут аксиальные физические величины.

На линале этого не было, потому что матрица была лишь с поворотом, а у Соколова она может содержать отражение. Определить, есть ли отражение, можно по определителю: 1 – отражения нет, -1 – отражение есть (о чём, кстати, Соколов также пишет):

Пусть $\hat{\Pi}$ – лин. оператор простр. преобразования

$$\det \hat{\Pi} = \det \|\hat{\Pi}_{\alpha\beta}\| = \begin{cases} +1, & \text{для поворотов} \\ -1, & \text{для инверсии и зеркального отражения} \end{cases}$$

$$\det \hat{\Pi} = \det \hat{\Pi}^{-1}$$